LAND BRANDENBURG

Berlin

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft

Zentralabitur 2013

Nachschreibtermin

Mathematik
Grundkurs

Aufgaben
Erwartungshorizonte

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2013

Mathematik

Grundkurs

Erwartungshorizonte

Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.

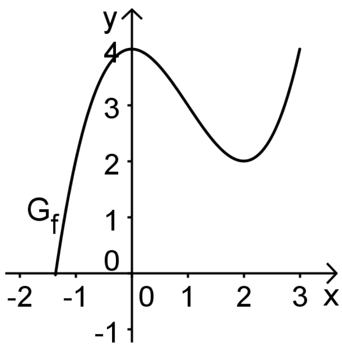
Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe – z. B. 3.1 a) – ist verbindlich.

Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.

Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe 1.1: Berghütte

Der Graph der Funktion f mit der Gleichung
$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ und $a, b, c \in IR$, $a \neq 0$
beschreibt in einem Koordinatensystem für konkrete Werte der Parameter a, b und c annähernd die Profillinie eines Felsens mit einem angrenzenden Tal (siehe nebenstehende Abbildung). Durch Messungen wurden die Koordinaten der Punkte $A(-1 \mid 2)$, $B(1 \mid 3)$ und $C(3 \mid 4)$ auf der Profillinie bestimmt, $1\,\text{LE} = 100\text{ m}$.

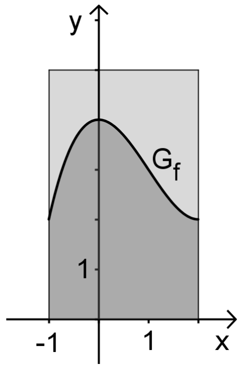


a) Ermitteln Sie a, b und c und geben Sie die Gleichung der Funktion f an.
[Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$]

b) Die Region wird im kommenden Jahr touristisch erschlossen. Aus diesem Grund wird genau auf dem Gipfel des Felsens eine Berghütte mit Aussichtsplattform errichtet. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes, der auf der Profillinie dem Gipfel des Felsens entspricht.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auch auf weitere lokale Extrempunkte und geben Sie deren Koordinaten und Art an.

c) Für den Materialtransport während der Bauphase soll eine Seilbahn errichtet werden, die später auch von den Besuchern genutzt werden kann. Das Tragseil dieser Bahn soll tangential im Punkt $P(-0{,}5 \mid f(-0{,}5))$ am Berg befestigt werden und in einem Punkt $Q(x \mid 0)$ enden.
Berechnen Sie, wie lang dieses Seil mindestens sein muss, wenn man ein eventuelles Durchhängen des Seiles vernachlässigt.

d) Auf der Abbildung ist der Felsen im Intervall $-1 \leq x \leq 2$ direkt von vorn unverzerrt zu sehen (siehe Skizze).
Berechnen Sie die Fläche, die der Felsen auf der Abbildung einnimmt.



e) Die Aussichtsplattform der Berghütte befindet sich im Punkt $S(0 \mid 4{,}12)$.
Begründen Sie, dass die Sicht von der Plattform bis zum tiefsten Punkt $T(2 \mid 2)$ des nach rechts angrenzenden Tals im Intervall $[0{,}5;1]$ durch den Felsen behindert wird.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	10	11	6	4	40

Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.1: Berghütte

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Ermitteln der Parameterwerte: $I\ \ f(-1) = -a + b + c = 2$ $II\ \ f(1) = a + b + c = 3$ $III\ \ f(3) = 27a + 9b + c = 4$ Lösen des Gleichungssystems ergibt $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{2}$ und $c = 4$. Gleichung der Funktion f: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$	3	6	
b)	Ermitteln der lokalen Extrempunkte: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$, $f''(x) = 3x - 3$ $f'(x) = 0 = \frac{3}{2}x^2 - 3x,\ x_1 = 0$, $x_2 = 2$ $f''(0) = -3 < 0$, lokales Maximum; $f''(2) = 3 > 0$, lokales Minimum $f(0) = 4$, $f(2) = 2$ Der Gipfel liegt im Punkt $H(0 \mid 4)$, darüber hinaus hat der Graph der Funktion *f* den lokalen Tiefpunkt $T(2 \mid 2)$.	2 8		
c)	Ermitteln der Tangentengleichung für das Tragseil: $m_t = f'(-0{,}5) = \frac{15}{8}$, $f(-0{,}5) = \frac{57}{16}$ $t:\ y = \frac{15}{8}x + \frac{9}{2}$ Koordinaten des Punktes *Q* und Mindestlänge des Tragseiles ermitteln: $0 = \frac{15}{8}x + \frac{9}{2};\ x = -\frac{12}{5},\ Q\left(-\frac{12}{5} \mid 0\right)$ $l = \overline{PQ} = \sqrt{\left(-0{,}5 - \left(-\frac{12}{5}\right)\right)^2 + \left(\frac{57}{16} - 0\right)^2} \approx 4{,}04\,\text{LE}$ Das Tragseil muss mindestens 404 Meter lang sein.	5	6	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
d)	Berechnung der Fläche: $A = \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x \right]_{-1}^{2} = 9{,}375 \text{ FE}$ Der Felsen nimmt in der Abbildung eine Fläche von 9,375 FE ein.		6	
e)	Begründung, dass der Felsen die Sicht behindert: Die „Sichtgerade“ durch die Punkte S und T hat die Gleichung $y = -1{,}06x + 4{,}12$. Es ist zu begründen, dass diese im gegebenen Intervall vom Graphen der Funktion f geschnitten wird. $-1{,}06x + 4{,}12 = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 4 \Leftrightarrow 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 1{,}06x - 0{,}12 = 0$ Es sei $h(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 1{,}06x - 0{,}12$ Wegen $h(0{,}5) > 0$ und $h(1) < 0$ muss es zwischen 0,5 und 1 eine Stelle x_0 geben mit $h(x_0) = 0$. In unmittelbarer Nähe dieser Stelle wird die Sicht durch den Felsen behindert.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	18	18	4
	Summe der BE	40		

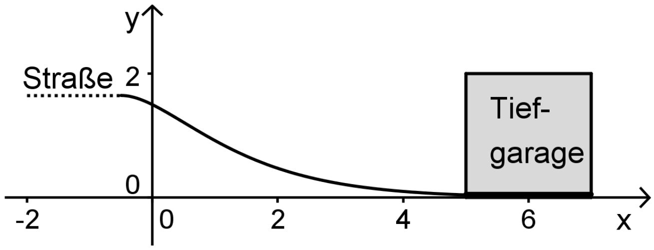
Aufgabe 1.2: Tiefgarage

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x+1{,}5)e^{-x}$; $x \in IR$. Ihr Graph sei G.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

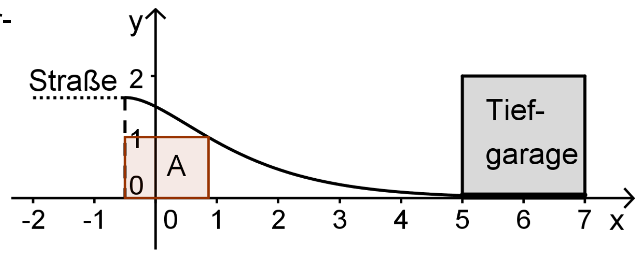
b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes von G.
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f''(x) = (x-0{,}5)e^{-x}$.
Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = -e^{-0{,}5} \cdot x + 2{,}5e^{-0{,}5}$ die Tangente im Wendepunkt des Graphen von f ist.
Hinweis: Die Existenz des Wendepunktes mit Hilfe einer hinreichenden Bedingung muss nicht nachgewiesen werden.

c) Für ein Einkaufszentrum wird die Zufahrt zu einer Tiefgarage geplant. Das Profil der Zufahrt soll im Intervall $[-0{,}5;5]$ mithilfe der Funktion f modelliert werden (siehe nebenstehende Darstellung, $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$).



Berechnen Sie die mittlere Steigung der Zufahrt im angegebenen Intervall.
Geben Sie außerdem die Stelle der Zufahrt an, an der ein Fahrzeug beim Herausfahren aus der Tiefgarage die größte Steigung überwinden muss.

d) Direkt unterhalb der Zufahrt ist ein quaderförmiger Raum geplant, siehe Abbildung. Die linke Wand steht bei $x = -0{,}5$, die Breite (in x-Richtung) soll größer als 0,5 m sein. Die Dicke der Fahrbahn bleibt unberücksichtigt.
Ermitteln Sie den maximalen Inhalt der Querschnittsfläche A des Raumes.



Auf den Nachweis der Existenz des Maximums wird verzichtet.

e) Alternativ kann die Tiefgaragenzufahrt im Intervall $[-0{,}5;5]$ auch mit dem Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert werden. Dabei sollen sowohl der Übergang vom Garagenboden zur Ausfahrt als auch der Übergang von der Ausfahrt zur Fahrbahn horizontal verlaufen und ohne „Knick“ erfolgen.
Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, das zur Ermittlung der Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion genutzt werden kann.

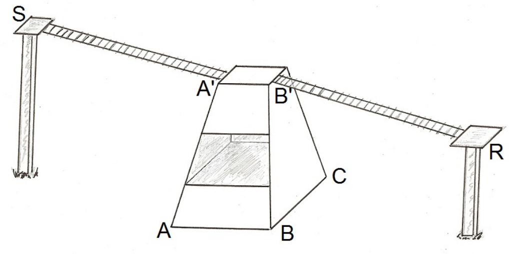
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	15	6	9	4	40

Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.2: Tiefgarage

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $f(0)=1{,}5$, $S_y(0\mid 1{,}5)$; $0=(1{,}5+x)e^{-x}$, $S_x(-1{,}5\mid 0)$ Verhalten der Funktionswerte für $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	4 2		
b)	Bilden der Ableitung: $f'(x)=(-x-0{,}5)e^{-x}$ Ermittlung des Extrempunktes: $f'(x)=0$, $(-x-0{,}5)e^{-x}=0$; $x=-0{,}5$; $f''(-0{,}5)=-e^{0{,}5}<0$, $f(-0{,}5)=e^{0{,}5}$ $H\left(-0{,}5\mid e^{0{,}5}\right)$ ist lokaler Hochpunkt. Nachweis der Wendetangente: $f''(x)=0$, $x=0{,}5$, $W\left(0{,}5\mid 2e^{-0{,}5}\right)$ $f'(0{,}5)=-e^{-0{,}5}=m_t$, $n=2{,}5e^{-0{,}5}$ Die Wendetangente hat die Gleichung $g(x)=-e^{-0{,}5}\cdot x+2{,}5e^{-0{,}5}$	4 6	5	
c)	Berechnung der mittleren Steigung: $m_s=\dfrac{f(-0{,}5)-f(5)}{-0{,}5-5}\approx-0{,}29$ Die mittlere Steigung der Zufahrt ist somit $\lvert-0{,}29\rvert=0{,}29$. Angabe der Stelle mit der größten Steigung: Die größte Steigung liegt im Wendepunkt $W\left(0{,}5\mid 2e^{-0{,}5}\right)$ des Graphen vor, also ist die gesuchte Stelle $x=0{,}5$.		4 2	
d)	Berechnung des maximalen Flächeninhalts: $A_{\text{Re}}=a\cdot b$; $a=x+0{,}5$; $b=f(x)=(x+1{,}5)e^{-x}$ $A(x)=(x+0{,}5)\cdot f(x)=\left(x^2+2x+\dfrac{3}{4}\right)e^{-x}$		3	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
noch d)	$A'(x)=\left(\frac{5}{4}-x^2\right)e^{-x}$ $A'(x)=0$, $x_1=\sqrt{\frac{5}{4}}\approx 1{,}12$, $x_2=-\sqrt{\frac{5}{4}}\approx -1{,}12$ Der Wert für x_2 entfällt als rechter Rand, da dieser laut Aufgabenstellung größer als null sein muss. Somit erhält man mithilfe von x_1 als größtmöglichen Flächeninhalt $A\approx 1{,}385\ \text{m}^2$.		6	
e)	Bedingungen für das Aufstellen einer Funktionsgleichung: $h(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$ Aus den Bedingungen 1. $h(-0{,}5)=e^{0{,}5}$; 2. $h'(-0{,}5)=0$; 3. $h(5)=6{,}5\cdot e^{-5}$; 4. $h'(5)=0$ folgt das Gleichungssystem $I\quad -0{,}125a+0{,}25b-0{,}5c+d=e^{0{,}5}$ $II\quad 0{,}75a-b+c=0$ $III\quad 125a+25b+5c+d=6{,}5\cdot e^{-5}$ $IV\quad 75a+10b+c=0$			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	16	20	4
	Summe der BE	40		

Aufgabe 2.1: Kletterpark



Das Gelände eines Kletterparks befindet sich in der *x*-*y*-Ebene, $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

Ein Klettersteg verbindet zwei Stationen miteinander.

a) Die Stationen befinden sich in den Punkten $R(10|15|4)$ und $S(-10|-15|6)$.
Zur Vereinfachung wird der Klettersteg als Strecke $\overline{RS}$ betrachtet.
Berechnen Sie die Länge des Kletterstegs.
Aus Sicherheitsgründen soll der Klettersteg in der Mitte durch ein Podest unterstützt werden (siehe Grafik). Die Grundfläche des Podests hat die Eckpunkte $A(3|-2|0)$, $B(3|2|0)$, $C(-3|2|0)$ und $D(-3|-2|0)$.
Weisen Sie nach, dass diese Grundfläche rechteckig ist.

b) Der Mittelpunkt der parallel zur Grundfläche liegenden quadratischen Deckfläche des Podests ist genau der Mittelpunkt von $\overline{RS}$. Ein Eckpunkt der Deckfläche ist der Punkt $A'(1|-1|5)$. Die Seiten verlaufen parallel zur *x*- bzw. *y*-Achse.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B', C', D'.
[Kontrollergebnis: $B'(1|1|5)$]

c) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene *E*, in der die Seitenfläche $ABB'A'$ des Podests liegt.
Berechnen Sie den Winkel, den diese Seitenfläche mit der Grundfläche einschließt.
[Kontrollergebnis für *E*: $5x + 2z = 15$]

d) Ein zweiter Steg verläuft vom Punkt $Z(10|-1|2)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7{,}6 \\ 1{,}7 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ und trifft die Seitenfläche $ABB'A'$ des Podests.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *P*, in dem der zweite Steg auf $ABB'A'$ trifft.
[Kontrollergebnis: $P(2{,}4\,|\,0{,}7\,|\,1{,}5)$]

e) In die Seitenfläche $ABB'A'$ wird eine trapezförmige Öffnung geschnitten. Eine Person von 2 m Größe soll aufrecht hindurchgehen können. Unter- und Oberkante der Öffnung verlaufen parallel zur Grundfläche des Podests bis hin zu den Kanten AA' und BB'. Die Unterkante liegt in der Höhe, in der der zweite Steg gemäß d) auf die Seitenfläche stößt.
Bestimmen Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte der Öffnung.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	6	9	5	4	30

Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.1: Kletterpark

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\left\|\overrightarrow{RS}\right\| = \sqrt{20^2 + 30^2 + 2^2} \approx 36{,}1$ (m)	2		
	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, d.h. die Seiten schließen einen Winkel von $90°$ ein. Die Grundfläche ist ein Rechteck.		4	
b)	$\overrightarrow{OM'} = 0{,}5 \cdot (\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS})$; $M'(0\,\|\,0\,\|\,5)$ $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + 2 \cdot \overrightarrow{A'M'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $C'(-1\,\|\,1\,\|\,5)$ Da es sich um ein Quadrat handelt, können die Koordinaten der Punkte *B‘* und *D’* ohne weitere Rechnung mit jeweils veränderten *x*-bzw. *y*-Koordinaten angegeben werden: $B'(1\,\|\,1\,\|\,5)$; $D'(-1\,\|\,-1\,\|\,5)$		6	
c)	Z. B. Angabe von $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und z. B. Bestimmung eines Normalenvektors: $\left\| \begin{array}{r} 4y = 0 \\ -2x + 3y + 5z = 0 \end{array} \right\|$, Daraus ergibt sich z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ $5x + 2z = 15$	5		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
noch c)	Normalenvektor der *x*-*y*- Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Normalenvektor der Ebene $E_{ABB'A'}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\rvert} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$; $\alpha \approx 68{,}2°$		4	
d)	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7{,}6 \\ 1{,}7 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ $g \cap E$: $5(10 - 7{,}6r) + 2(2 - 0{,}5r) = 15 \Leftrightarrow r = 1$ $P(2{,}4 \mid 0{,}7 \mid 1{,}5)$	5		
e)	Punkt *U* auf $\overline{AA'}$ mit $z = 1{,}5$, $g_{AA'}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\left\lvert\begin{matrix} x = 3 - 2r \\ y = -2 + r \\ 1{,}5 = 5r \end{matrix}\right\rvert$; $r = 0{,}3$; $U(2{,}4 \mid -1{,}7 \mid 1{,}5)$ Die Seitenfläche ist ein gleichschenkliges Trapez. Daher ergibt sich für den Punkt *V* auf $\overline{BB'}$ mit $z = 1{,}5$ $V(2{,}4 \mid 1{,}7 \mid 1{,}5)$. Für *W* auf $\overline{AA'}$ gilt $z = 3{,}5$, also $r = 0{,}7$ und $W(1{,}6 \mid -1{,}3 \mid 3{,}5)$. *X* auf $\overline{BB'}$: Es ergibt sich $X(1{,}6 \mid 1{,}3 \mid 3{,}5)$.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	12	14	4
	Summe der BE	30		

Aufgabe 2.2: Punkt, Gerade, Ebene

Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,1\,|\,-2)$, $B(0\,|\,4\,|\,4)$ und die Ebene $E_1:\; x+2y+2z=-2$.

a) Die Gerade g_{AB} durch die Punkte A und B schneidet die Ebene E_1.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel von g und E_1.

b) Eine Ebene E_2 enthält die Gerade g_{AB} und steht senkrecht auf der Ebene E_1.
Begründen Sie, dass $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\lambda\in IR, \mu\in IR$, eine Gleichung für E_2 ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E_1 und E_2 .

c) Ein beliebiger Punkt C_t der Schnittgeraden s ist gegeben durch $C_t(-2t\,|\,1-t\,|\,-2+2t)$.
Weisen Sie nach, dass A einer der Punkte C_t ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C_t so, dass das Dreieck ABC_t bei B einen rechten Winkel besitzt.
[Zur Kontrolle: $t=5$]
Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D derart, dass durch D das Dreieck ABC_5 zu einem Rechteck ABC_5D ergänzt wird und berechnen Sie die Länge der Diagonalen.

d) Die Punkte A, B, C_5 und $B´$ sind die Eckpunkte eines Drachenvierecks mit der Symmetrieachse AC_5.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $B´$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	8	8	10	4	30

Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.2: Punkt, Gerade, Ebene

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
a)	Gleichung für $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und Einsetzen der Koordinaten des Geradenterms von g_{AB} in die Koordinatenform von E_1: $2 \cdot (1+3s) + 2 \cdot (-2+6s) = -2 \Leftrightarrow 18s - 2 = -2 \Leftrightarrow s = 0$. Einsetzen von null für *s* in die Geradengleichung von g_{AB} liefert $\overrightarrow{x_S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und somit $S(0 \mid 1 \mid -2)$.	5		
	Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ der Geradengleichung von g_{AB} und der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Normalenform von E_1 liefern $\sin\varphi = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{18}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{9}} \approx 0{,}89$. Daraus folgt für den Schnittwinkel: $\varphi \approx 63°$.	3		
b)	Da g_{AB} in E_2 liegt, ist der Richtungsvektor aus der Gleichung von g_{AB} auch ein Richtungsvektor der Gleichung für E_2 und der Punkt $A(0 \mid 1 \mid -2)$ ein Punkt von E_2. Da E_2 senkrecht zu E_1 verläuft, ist auch der Normalenvektor von E_1 ein Richtungsvektor für E_2.		2	
	Ermitteln einer Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2 mithilfe der Schnittbedingung $\mu + 2 + 6\lambda + 4\mu - 4 + 12\lambda + 4\mu = -2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\mu$.	3		
	Verwenden der Schnittbedingung oder zweier Punkte der Schnittgeraden zur Ermittlung einer Gleichung der Schnittgeraden, z. B. $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.		3	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
c)	Mit $t = 0$ gilt $C_0(0\,\vert\,1\,\vert\,-2) = A(0\,\vert\,1\,\vert\,-2)$.	1		
	Die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC_t}$ müssen orthogonal sein, also gilt $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC_t} = 0$. Mit $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} -2t \\ -3-t \\ -6+2t \end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC_t} = 9 + 3t + 36 - 12t = 0 \Leftrightarrow t = 5$. Somit ergibt sich $C_5(-10\,\vert\,-4\,\vert\,8)$.		5	
	Die Koordinaten des Punktes D ergeben sich aus $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC_5} + \overrightarrow{BA}$: $D(-10\,\vert\,-7\,\vert\,2)$. Länge der Diagonalen d: $d = \left\vert \overrightarrow{BD} \right\vert = \left\vert \begin{pmatrix} -10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \right\vert = 15\text{ LE}$ oder $d = \left\vert \overrightarrow{AC_5} \right\vert = \left\vert \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \right\vert = 15\text{ LE}$		4	
d)	Der an der Geraden durch A und C_5 gespiegelte Punkt B ergibt den Punkt B'. Der Lotfußpunkt L von B auf diese Gerade ist ein Punkt C_t, da Punkt A mit Punkt C_0 identisch ist. Also gilt $\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{AC_5} = 0$: $\overrightarrow{AC_5} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} -2t \\ -3-t \\ -6+2t \end{pmatrix}$ aus c) liefern $20t + 15 + 5t - 60 + 20t = 0 \Leftrightarrow t = 1$ und somit $L(-2\,\vert\,0\,\vert\,0)$. Für B' gilt $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{BL}$, also $\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $B'(-4\,\vert\,-4\,\vert\,-4)$.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	12	14	4
	Summe der BE	30		

Aufgabe 3.1: Castingshow

Bei einer Castingshow, die aus einer Stadthalle live im Fernsehen übertragen wird, bewerben sich 20 Nachwuchstalente für die Endrunde.
15 von ihnen singen Songs in deutscher Sprache, fünf singen englisch.
Zunächst müssen 12 der 20 Kandidaten ausgewählt werden.
Dazu werden einem Ehrengast die Augen verbunden. Er zieht dann aus einer Schale, in der die Karten mit den Namen der Kandidaten liegen, nacheinander 12 Karten, ohne sie wieder zurückzulegen, und gibt sie dem Moderator.

a) David ist ein englisch singender Kandidat.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Davids Namenskarte wird als erste Karte gezogen.
B: Davids Namenskarte wird als zweite oder dritte Karte gezogen.
C: Der Ehrengast zieht keine Karte mit dem Namen eines englisch singenden Kandidaten.

In der Endrunde der Castingshow stellen die verbleibenden 12 Kandidaten ihre Songs vor.
Die Auswahl der Besten erfolgt durch eine telefonische Zuschauerabstimmung.
Während die Abstimmung läuft, befragt der Moderator Gäste in der Stadthalle nach ihrem Favoriten. Der Saal ist fast ausverkauft, es sind mehr als fünfhundert Gäste anwesend.
Dabei ist bekannt, dass jeder Vierte der Anwesenden Fan von David ist.
Der Moderator schafft es, 10 der anwesenden Gäste zu befragen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
D: Höchstens vier der Befragten nennen David als ihren Favoriten.
E: Mehr als sieben der Befragten nennen einen anderen Favoriten.

c) Die Anzahl der Befragten, die David als ihren Favoriten nennen, wird k genannt.
Ermitteln Sie, für welchen Wert von k (unter 10 Befragten) die zugehörige Wahrscheinlichkeit am größten ist.

d) Der Zwischenstand der telefonischen Zuschauerabstimmung zeigt David als deutlichen Favoriten, wodurch sich die Anzahl seiner Fans im Saal erhöht hat. Würde man nun erneut 10 Personen befragen, würden mit etwa 90 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei für David sein.
Bestimmen Sie, wie hoch der Anteil seiner Fans im Publikum nun ist (Näherungswert).

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	12	9	5	4	30

Anlage

Anlage zu Aufgabe 3.1: Castingshow

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze enthalten 1,0000.

Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ($p > 0,5$), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert)

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
5	0	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0503	0313	4	5
	1	9774	9185	8038	7373	6328	5282	4609	3370	2562	1875	3	
	2	9988	9914	9645	9421	8965	8369	7901	6826	5931	5000	2	
	3		9995	9967	9933	9844	9692	9547	9130	8688	8125	1	
	4			9999	9997	9990	9976	9959	9898	9815	9688	0	
10	0	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0025	0010	9	10
	1	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0233	0107	8	
	2	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0996	0547	7	
	3	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	2660	1719	6	
	4	9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	5044	3770	5	
	5		9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	7384	6230	4	
	6			9997	9991	9965	9894	9803	9452	8980	8281	3	
	7				9999	9996	9984	9966	9877	9726	9453	2	
	8						9999	9996	9983	9955	9893	1	
	9								9999	9997	9990	0	
15	0	4633	2059	0649	0352	0134	0047	0023	0005	0001	0000	14	15
	1	8290	5490	2596	1671	0802	0353	0194	0052	0017	0005	13	
	2	9638	8159	5322	3980	2361	1268	0794	0271	0107	0037	12	
	3	9945	9444	7685	6482	4613	2969	2092	0905	0424	0176	11	
	4	9994	9873	9102	8358	6865	5155	4041	2173	1204	0592	10	
	5	9999	9978	9726	9389	8516	7216	6184	4032	2608	1509	9	
	6		9997	9934	9819	9434	8689	7970	6098	4522	3036	8	
	7			9987	9958	9827	9500	9118	7869	6535	5000	7	
	8			9998	9992	9958	9848	9692	9050	8182	6964	6	
	9				9999	9992	9963	9915	9662	9231	8491	5	
	10					9999	9993	9982	9907	9745	9408	4	
	11						9999	9997	9981	9937	9824	3	
	12								9997	9989	9963	2	
	13									9999	9995	1	
20	0	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	0000	19	20
	1	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0001	0000	18	
	2	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0009	0002	17	
	3	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0049	0013	16	
	4	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0189	0059	15	
	5	9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0553	0207	14	
	6		9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	1299	0577	13	
	7		9996	9887	0679	8982	7723	6615	4159	2520	1316	12	
	8		9999	9972	9887	9591	8867	8095	5956	4143	2517	11	
	9			9994	9972	9861	9520	9081	7553	5914	4119	10	
	10			9999	9994	9961	9829	9624	8725	7507	5881	9	
	11				9999	9991	9949	9870	9435	8692	7483	8	
	12					9998	9987	9963	9790	9420	8684	7	
	13						9997	9991	9935	9786	9423	6	
	14							9998	9984	9936	9793	5	
	15								9997	9985	9941	4	
	16									9997	9987	3	
	17										9998	2	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	N
		p											

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.1: Castingshow

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	$P(A) = \frac{1}{20}$ Berechnung anhand eines (reduzierten) Baumdiagramms unter Verwendung der beiden Pfadregeln: $P(B) = \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{19} + \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{10}$ Ereignis *C*: Alle 12 ausgewählten Kandidaten singen in deutscher Sprache. Modellierung über die Anzahl der Möglichkeiten oder einen reduzierten Baum führt zu $P(C) = \frac{\binom{15}{12}}{\binom{20}{12}} \approx 0{,}0036$	2 5	5	
b)	Modellierung mit einer Bernoulli-Kette $n = 10$ und $p = 0{,}25$ *X*: Anzahl der David-Fans $P(D) = P(X \leq 4)$. Ablesen liefert $P(D) \approx 0{,}922$ *Y*: Anzahl der Befragten, die einen anderen Kandidaten favorisieren $P(E) = P(Y > 7) = 1 - P(Y \leq 7)$ Ablesen für $p = 0{,}75$ liefert $P(E) \approx 0{,}526$	4	5	
c)	Ermittlung (rechnerisch oder Ablesen aus einer geeigneten Tabelle) und Vergleich der folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P(X = 1) \approx 0{,}188; P(X = 2) \approx 0{,}282$ und $P(X = 3) \approx 0{,}250$ Für $k = 2$ ergibt sich die größte Wahrscheinlichkeit.		5	
d)	Zu bestimmen ist *p* so, dass $P(X \geq 2) = 1 - F(10; p; 1) \approx 0{,}9$ gilt. Verwendung der Tabelle: $1 - F\left(10; \frac{1}{3}; 1\right) \approx 0{,}896$ Der Anteil hat sich auf etwa ein Drittel erhöht.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	11	15	4
	Summe der BE	30		

Aufgabe 3.2: Fernsehen

a) Unter den 25 Schülern eines Mathematikkurses wurde eine Befragung durchgeführt. Jeder dieser Schüler repräsentiert genau einen Haushalt.
17 der 25 Schüler gaben dabei an, dass Spielfilme zu den bevorzugten Sendungen in ihrem Haushalt gehören. Mehrfachnennungen waren möglich.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse zum Beispiel mit Hilfe geeigneter Baumdiagramme.

A: Von drei nacheinander befragten Schülern bevorzugt nur der Haushalt des zweiten Schülers Spielfilme.

B: Von drei nacheinander befragten Schülern bevorzugen die Haushalte von genau zwei Schülern Spielfilme.

Eine landesweite repräsentative Umfrage unter Haushalten, die einen Fernseher besitzen, nach bevorzugten Sendungen ergab folgendes Ergebnis.

Bevorzugte Sendungen	Sehverhalten in Prozent
Serien	84
Unterhaltungssendungen	73
Spielfilme	68
Nachrichten	52
Sport	44
Dokumentationen	21

b) Aus diesen Haushalten, die einen Fernseher besitzen, werden 15 zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

C: Es befinden sich genau vier darunter, bei denen Sport zu den bevorzugten Sendungen gehört.

D: Es befindet sich höchstens ein Haushalt darunter, bei denen Dokumentationen zu den bevorzugten Sendungen gehören.

E: Es befinden sich mindestens 13 darunter, bei denen Serien zu den bevorzugten Sendungen gehören.

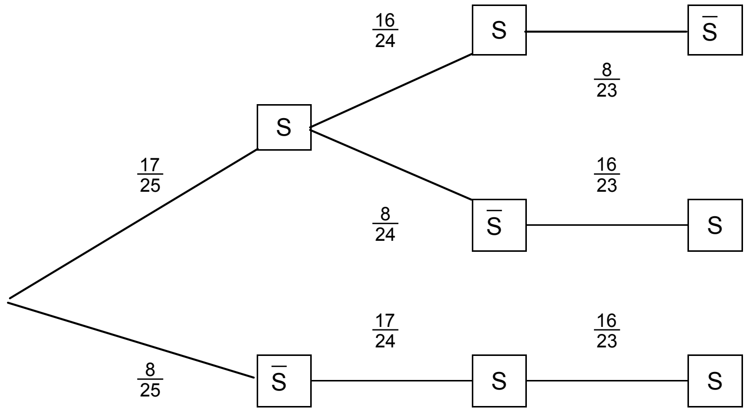
c) Berechnen Sie, wie viele Haushalte, die einen Fernseher besitzen, mindestens befragt werden müssen, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90 % wenigstens einen Haushalt unter diesen zu haben, in dem Dokumentationen zu den bevorzugten Sendungen gehören.

d) Bei der landesweiten Umfrage waren (wie die aus den Prozentangaben leicht ersichtlich) Doppelnennungen möglich. So ergab eine genauere Auswertung dieser Umfrage unter den Haushalten, in denen Sport zu den bevorzugten Sendungen gehört, dass 55 % von ihnen auch Unterhaltungssendungen als bevorzugte Sendung angekreuzt hatten.

Ermitteln Sie unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Information die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem zufällig ausgewählten Haushalt weder Sport noch Unterhaltungssendungen zu den bevorzugten Sendungen gehören.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	8	13	5	4	30

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.2: Fernsehen

<table>
<tr><th rowspan="2">Teilaufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Mögliche Baumdiagramme und zugehörige Wahrscheinlichkeiten:
S: Haushalt bevorzugt Spielfilme
$0 \xrightarrow[\frac{8}{25}]{} \overline{S} \xrightarrow[\frac{17}{24}]{} S \xrightarrow[\frac{7}{23}]{} \overline{S}$
$P(A) \approx 0{,}069$
S: Spielfilm bevorzugt


$P(B) = 3 \cdot \frac{17 \cdot 16 \cdot 8}{25 \cdot 24 \cdot 23} \approx 0{,}473$</td><td>3

5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Ermitteln der benötigten Daten aus der Tabelle:
X_1: Anzahl der Haushalte, bei denen Sport bevorzugt ist;
X_1 ist (näherungsweise) $B_{15;0,44}$-verteilt.
$P(C) = P(X_1 = 4) = \binom{15}{4} \cdot 0{,}44^4 \cdot 0{,}56^{11} \approx 0{,}087$
X_2: Anzahl der Haushalte, bei denen Dokumentationen bevorzugt sind; X_2 ist (näherungsweise) $B_{15;0,21}$-verteilt.
$P(D) = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)$
$P(D) = 0{,}79^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}21 \cdot 0{,}79^{14} \approx 0{,}145$
X_3: Anzahl der Haushalte, bei denen Serien bevorzugt sind;
X_3 ist (näherungsweise) $B_{15;0,84}$-verteilt.
$P(E) = P(X_3 \geq 13) = P(X_3 = 13) + P(X_3 = 14) + P(X_3 = 15)$
$P(E) \approx 0{,}561$</td><td>4</td><td>4

5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teilaufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Y : Anzahl der Haushalte, die Dokumentationen bevorzugt sehen;
Y ist (näherungsweise) binomialverteilt.
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}9$
$1 - 0{,}79^n \geq 0{,}9$
$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}79}$
$n \geq 9{,}77$
Es müssen mindestens 10 Haushalte befragt werden.

</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Auswahl z. B. der Vierfeldertafel zur Ermittlung des gesuchten Anteils.
O: Haushalt bevorzugt Sportsendungen
U: Haushalt bevorzugt Unterhaltungssendungen

<table>
<tr><th></th><th>O</th><th>$\overline{\text{O}}$</th><th></th></tr>
<tr><td>U</td><td>242</td><td>488</td><td>730</td></tr>
<tr><td>$\overline{\text{U}}$</td><td>198</td><td>72</td><td>270</td></tr>
<tr><td></td><td>440</td><td>560</td><td>1000</td></tr>
</table>

Willkürliche Festlegung einer Gesamtheit (z. B. 1000) und Eintragung der absoluten Häufigkeiten entsprechend der vorgegebenen Anteile (hier: 730; 270; 440; 560 und 242).
Ergänzung der übrigen Felder (ein Feld kann frei bleiben) und Deutung: In 72 von 1000 Haushalten, also in 7,2 % der Haushalte, gehörten weder Sport noch Unterhaltungssendungen zu den bevorzugten Sendungen.

</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>12</td><td>14</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>