4. a) $E_1: \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -x+2y+z=0 \\ -y+z=0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x=3 \\ y=z=1 \end{matrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_1: \quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

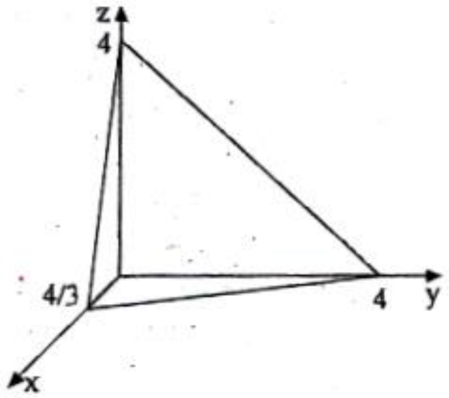
b) Die Normalvektoren beider Ebenen sind nicht parallel, die Ebenen müssen sich schneiden.

E_1 in E_2 einsetzen: $\begin{pmatrix} 1-r-2 \\ 2r-s+1 \\ 1+r+s+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2r + 2s = 0, \quad r = s$

Schnittgerade: $g_{1/2}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel: $\cos\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{11 \cdot 3}} = \frac{3}{\sqrt{33}}, \quad \gamma \approx 58{,}52°$

c) $E_1: 3x + y + z = 4$
Eckpunkte des Dreiecks: X(4/3|0|0), Y(0|4|0), Z(0|0|4)



$d(X;Y) = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} \approx 4{,}22$

$d(X;Z) = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} \approx 4{,}22$

$d(Y;Z) = \sqrt{16 + 16} \approx 5{,}66, \quad U \approx 14{,}10$

d) $E_1: \quad \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad P \in E_1$

$E_2: \quad \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0, \quad P \notin E_2$

e) $E_2: x - y + z = 2$, X(2|0|0), Y(0|−2|0), P(−2|4|6)
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich der Hälfte des von den Vektoren

$\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{XP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallogramms:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}^2 - \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8 \cdot 68} \approx 11{,}66$$

alternativ: mittels Vektorprodukt: $A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right| \approx 11{,}66$

f) Zur Schnittgerade g_s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird ein zweiter Richtungsvektor hinzugefügt,

der senkrecht auf E_2 steht, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $E^*: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$